Fehlerrechnung

Messgeräte besitzen immer eine Toleranz, die zusammen mit anderen Faktoren einen Messfehler verursacht. Um die Aussagekraft einer Messung einschätzen zu können, sollte man die Größenordnung des Fehlers kennen und bei Bedarf untersuchen, wie man ihn noch verkleinern könnte. Oder kurz gesagt: „Wer misst, misst Mist!“
Hier möchte ich die Fehlerrechnung mit Hilfe des totalen Differenzials vorstellen und erklären.

Warnung:
Die folgenden Ausführungen können Spuren von Mathematik enthalten. Dies kann bei vorgeschädigten Menschen zu heftigen allergischen Reaktionen führen. Zartbesaitete Menschen sollten ab hier nicht mehr weiter lesen, sonder sich lieber einen Horrorfilm ansehen oder ähnlich entspannende Maßnahmen ergreifen.

Aufgabenstellung:
Es wird die Ausgangsleistung es Verstärkers bestimmt. Als Lastwiderstand wird ein 4,7ohm-Widerstand verwendet (Toleranz 5%). Gemessen wird die effektive Sinusspannung bei 1kHz am Lastwiderstand (20V_{eff}, Messfehler des Multimeters 1,5%). Nun soll der Gesamtmessfehler ermittelt werden.

Rechnung:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial U} \cdot dU + \frac{\partial P}{\partial R} \cdot dR$$

Die erste Formel ist die bekannte Formel für die Leistung bei bekanntem Widerstand und gemessener Spannung. Darunter dann unsere Formel, um den Gesamtfehler zu berechnen, wobei der erste Summand den Fehler der Spannungsmessung ergibt und der zweite Summand den von der Widerstandstoleranz verursachten Fehler.
Aus $\frac{\partial P}{\partial U}$ (Ableitung von $P = \frac{U^2}{R}$ nach U) ergibt sich ein Faktor, mit dessen Größenordnung der Messfehler des Voltmeters in das Gesamtergebnis eingeht. Dem entsprechend ergibt sich aus $\frac{\partial P}{\partial R}$ (Ableitung von P nach R) der Faktor für die Abweichung durch die Widerstandstoleranz.

$$dP = \frac{2U}{R} \cdot dU - \left(\frac{U}{R}\right)^2 \cdot dR$$

$$|dP| \le \left|\frac{2U}{R} \cdot dU\right| + \left|\left(\frac{U}{R}\right)^2 \cdot dR\right| = \left|\frac{2 \cdot 20V}{4{,}7\Omega} \cdot dU\right| + \left|\left(\frac{20V}{4{,}7\Omega}\right)^2 \cdot dR\right|$$

$$|dP| \le \left|8{,}51\frac{V}{\Omega} \cdot dU\right| + \left|18{,}11\frac{V^2}{\Omega^2} \cdot dR\right|$$

$$|dP| \le \left|8{,}51\frac{V}{\Omega} \cdot \frac{20V \cdot 1{,}5\%}{100\%}\right| + \left|18{,}11\frac{V^2}{\Omega^2} \cdot \frac{4{,}7\Omega \cdot 5\%}{100\%}\right| = 2{,}55W + 4{,}26W = \underline{\underline{6{,}81W}}$$

$$P = \frac{(20V)^2}{4{,}7\Omega} = \underline{\underline{85W}}$$

Aus den beiden Ergebnissen für P und dP kann man jetzt nicht nur den relativen Fehler (8% Abweichung) berechnen, sondern auch erkennen, an welcher Stelle man die Messung noch optimieren könnte. Die Widerstandstoleranz geht zum Beispiel mit dem Faktor 18,11 in das Ergebnis ein, die der Spannungsmessung nur mit 8,51. Will man jetzt das Messergebnis verbessern hat man verschiedene Möglichkeiten. Am Effektivsten ist es, man setzt am größten Summand an. Das wäre in unserem Fall:

$$\left|\left(\frac{U}{R}\right)^2 \cdot dR\right|$$

Hier kann man jetzt versuchen den Faktor vor dR zu verkleinern, indem man zum Beispiel den R größer wählt da dieser im Nenner steht. Zwar steigt dann auch die Spannung U an da beide zusammenhängen, allerdings nicht so stark. Grund dafür ist, dass R unter der Wurzel steht wenn man die Leistungsformel nach U auflöst. Eine Vergrößerung des Lastwiderstandes hat auch den Vorteil, dass der Faktor im ersten Summand kleiner wird, da auch dort der Widerstand im Nenner zu finden ist. Rechnet man das mal für 16ohm aus, kommt allerdings die Ernüchterung. Der relative Fehler verbessert sich nur um 0,02%. Die andere Möglichkeit wäre es den zweiten Faktor dR in dem Produkt zu verkleinern. Zwar dürfte es schwierig sein Lastwiderstände dieser Leistungsklasse mit einer kleineren Toleranz als 5% zu finden, aber man kann auch einfach den exakten Wert des Widerstands ausmessen. dR entspricht dann nur noch der Toleranz des Messgeräts.